

MECÁNICA DE LAS BÓVEDAS DE FÁBRICA: EL ENFOQUE DEL EQUILIBRIO

(MASONRY VAULT MECHANICS: THE EQUILIBRIUM APPROACH)

Santiago Huerta. Dr. Arquitecto
Escuela T. S. de Arquitectura. Departamento de Estructuras
Universidad Politécnica de Madrid

Fecha de recepción: 2-III-05

443-10

ESPAÑA

RESUMEN

El padre Vicente Tosca, arquitecto, filósofo, matemático, y astrónomo, comienza su Tratado de Arquitectura (que forma parte de su Compendio matemático, 9 vols. 1701-1715) abordando el tema de la traza o proyecto de bóvedas

Lo más sutil y primoroso de la Arquitectura... es la construcción de todo género de arcos y bóvedas, cortando sus piedras, y ajustándolas con tal artificio, que la misma gravedad y peso que las había de precipitar hacia la tierra, las mantenga constantes en el aire, sustentándose las unas a las otras en virtud de la mutua complicación que las enlaza, con lo que cierran por arriba las fábricas con toda seguridad y firmeza.

SUMMARY

Father Vicente Tosca, architect, philosopher, mathematician and astronomer, began his Treatise on Architecture (included in his 9-volume Compendium on Mathematics, 1701-1715) by addressing the question of vault design.

Architecture's most subtle and exquisite achievement... is the construction of all manner of arches and vaults, cutting the stones and adapting them with such skill that the gravity and weight that should cause them to fall to the ground hold them in the air, one against the other, by virtue of the mutual complexity that links them, to firmly and securely close the structure across the top.

1. INTRODUCCIÓN

El equilibrio se alcanza a través de la geometría y, de este modo, es posible la construcción de edificios de fábrica seguros. Las antiguas reglas tradicionales para el proyecto de bóvedas y estribos de fábrica tienen un carácter geométrico, ya que establecen ciertas relaciones entre las dimensiones de los elementos estructurales. Regulan, por ejemplo, que el grosor de un estribo debe ser una cierta fracción entera de la luz de las bóvedas. De hecho en la afirmación del padre Tosca encontramos la esencia misma del proyecto de estructuras de fábrica (Huerta, 2004).

Sin embargo para nosotros, arquitectos e ingenieros del siglo XXI, todo esto nos parece demasiado ingenuo, la demostración de la ignorancia de los antiguos maestros; de hecho, hasta el siglo XVIII no se desarrolló una teoría científica de las estructuras, basada en la Resistencia de Materiales y las leyes de la Mecánica (Huerta, 1996). De cualquier forma estos ignorantes maestros constructores levantaron el Pantheon de Roma, Santa Sofía y las cate-

drales góticas. Por tanto, puede que, después de todo, el enfoque geométrico tradicional no esté demasiado equivocado. Es posible que los antiguos maestros tuvieran una teoría, distinta de nuestra teoría científica, pero basada en un profundo conocimiento de la naturaleza y comportamiento de las estructuras de fábrica. Si fuera así, sería interesante conocer algo sobre esta teoría, la cual, si juzgamos por los resultados, era extraordinaria. Sin embargo, aunque podemos ampliar nuestros conocimientos, no podemos sustraernos a los que ya tenemos. Estamos forzados a abordar el tema del análisis de arcos y bóvedas desde un enfoque científico, dentro del marco de la teoría de estructuras actual. Antes de proseguir se deben hacer dos observaciones.

La primera se refiere al objetivo de la Teoría de Estructuras. El objetivo de la teoría estructural es el proyecto de construcciones seguras o el análisis de la seguridad de las que ya existen. Es una ciencia aplicada no una ciencia pura. Como Rankine (1858) señaló, si la pregunta que se hace el científico es qué quiero saber, la del arquitecto o ingeniero

es qué quiero hacer. Todas las consideraciones teóricas están condicionadas por la necesidad de una respuesta a un problema sin demora.

La segunda observación hace referencia a nuestra propia ignorancia respecto al tema. Ya no se construyen bóvedas y toda la tradición de la construcción en fábrica se ha perdido en el mundo occidental. Esta parte de la arquitectura, que fue considerada lo más sutil y primoroso, nos es ajena. La mayor parte de los arquitectos e ingenieros nunca han visto construir una sencilla bóveda. Carecemos del oficio y experiencia del antiguo constructor, que seleccionaba la piedra, dibujaba las plantillas para cortarla, trazaba la cimbra, dirigía el proceso de construcción y, finalmente, supervisaba el descimbrado. Rodrigo Gil de Hontañón (*Tratado de arquitectura*, ca. 1540, copiado en García, 1681) después de describir la construcción de una bóveda gótica de crucería advierte que:

... estas cosas, podran ser difiçiles de comprehender faltando en quien las procura la experiencia, la practica, la profesion de la canteria, y la execucion, o el aberse allado presente a algunos çierres de cruçeria, para haçerse capaz en el asiento de ella.

Esta es precisamente la situación de cualquier arquitecto o ingeniero de la actualidad.

A partir de aquí trataremos de mostrar que los enfoques tradicional y moderno del cálculo de estructuras de fábrica llevan a la misma conclusión fundamental: la absoluta importancia de la geometría. Se demostrará que la moderna teoría del Análisis Límite de las estructuras de Fábrica, que ha sido desarrollada por el profesor Heyman, es la herramienta más apropiada para comprender y analizar las construcciones de fábrica. Esta teoría conduce al enfoque del equilibrio; el calculista necesita sólo estudiar posible estados de equilibrio con la fábrica trabajando a compresión. La existencia de estos posibles estados de equilibrio depende de la geometría. Una construcción segura es una construcción en equilibrio: la teoría moderna conduce a las mismas disposiciones geométricas que la tradicional. No podía ser de otro modo, los espectaculares logros de los antiguos arquitectos no pudieron ser fruto de la casualidad.

Se harán numerosas referencias históricas con la intención de dejar claro que existe una antigua tradición en el cálculo científico de las estructuras de fábrica según el enfoque del equilibrio. Tenemos mucho que aprender de los arquitectos e ingenieros de la antigüedad. Pudieron no tener una profunda comprensión de la teoría, pero poseían los conocimientos esenciales, ésos que proporciona la reflexión sobre la práctica. *Ars sine scientia nihil est*, la práctica no es nada sin la teoría, pero la teoría sin la práctica es simplemente peligrosa. La experiencia, en nuestro caso, debemos buscarla en los edificios construidos y en lo que

podemos extraer de la lectura crítica de los antiguos tratados de arquitectura e ingeniería.

2. LA ESTRUCTURA DE FÁBRICA: EL MATERIAL

Nuestro objetivo es ser capaces de entender y analizar bóvedas de fábrica, incluyendo cualquier combinación de ellas. Un ejemplo sería un edificio de fábrica. La Figura 1 reproduce un dibujo de Viollet-le-Duc que muestra la sección de un edificio medieval, acompañado de dos detalles de la construcción de muros (medieval y romano). Los dibujos son tan detallados que la estructura interna puede apreciarse con facilidad. En los muros, detrás de los paramentos de sillería, encontramos una estructura interna más irregular. Homogeneidad, isotropía, propiedades elásticas uniformes, etc., todas las hipótesis habituales en el cálculo de estructuras moderno no pueden hacerse en este caso, sin ir en contra del sentido común.

Lo que tenemos es un apilamiento de piedras, ladrillos o cascote, recibidos con mortero o a hueso, y dispuestos (aparejados) de tal modo que se encuentran en equilibrio bajo la acción de la gravedad. El mortero, si existe, es muy débil a tracción, por lo que la interacción entre los distintos elementos se tiene que producir por medio de esfuerzos de compresión. Además, es un hecho que el edificio mantiene su forma a través de los años: el rozamiento entre los distintos elementos es suficientemente alto para evitar el deslizamiento (el ángulo de rozamiento típico para la piedra es de 301-351). Finalmente, las tensiones de compresión son en general muy bajas, con lo que el peligro de fallo por aplastamiento es despreciable. Es posible que esta última observación pueda extrañar a un arquitecto o

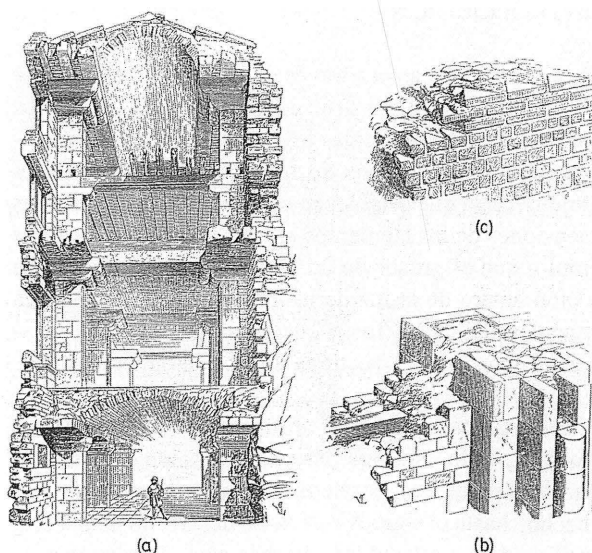


Figura 1.- Sección constructiva de un edificio medieval. Detalles de la construcción de muros romanos y medievales (Viollet-le-Duc 1858).

ingeniero actual, teniendo en cuenta el enorme tamaño de algunas estructuras de fábrica. Pero, de hecho, en estos enormes edificios se dan tensiones un orden de magnitud inferiores a las tensiones de rotura a compresión de las fábricas más usuales. La tensión media en la base de los pilares que soportan la cúpula de San Pedro en Roma (cúpula y tambor pesan 400.000 kN) es de tan sólo 1,7 N/mm²; Benouville calculó que en la tensión media en los pilares de la nave central de Beauvais era sólo de 1,3 N/mm².

Contamos, pues, con un material compuesto y heterogéneo, resistente a compresión, muy débil a tracción y sin peligro de deslizamiento entre las piedras. Todas estas consideraciones fueron realizadas explícita o implícitamente en la teoría de bóvedas de los siglos XVIII y XIX, y han sido sistematizadas por el profesor Heyman en los Principios del Análisis Límite de estructuras de fábrica: 1) resistencia infinita a compresión, 2) resistencia nula a tracción, y 3) imposibilidad de fallo por deslizamiento. Su importancia será puesta de manifiesto más adelante.

3. EL ARCO DE FÁBRICA

Equilibrio: líneas de empujes

El elemento básico en la arquitectura de fábrica es el arco: es la forma natural de salvar una luz con un material que no resiste tracción. Los arcos no están presentes en la naturaleza: son una invención, que apareció en Babilonia hace unos 6.000 años. (Los aztecas y los incas construyeron en fábrica durante siglos sin conocer el arco.)

En la Figura 2 podemos ver un arco de dovelas etrusco. Se labraron grandes piedras dándoles forma de dovelas; luego se dispusieron sobre una cimbra empezando desde los extremos. Tras colocar la última piedra en el centro, la clave, se retiró la cimbra y el arco permaneció en pie.

Analicemos el equilibrio de sólido libre de la clave. En cada junta (que imaginamos más o menos plana) existirá una cierta distribución de tensiones. La fuerza resultante debe ser una fuerza de compresión, un empuje; su punto de aplicación es el centro de empuje que debe estar dentro del plano de la junta. Los dos empujes en las juntas mantienen la clave en equilibrio.

Lo mismo ocurre con el resto de piedras hasta que llegamos a los arranques del arco, donde los estribos resisten el empuje de la última de la dovela. Este es el empuje del arco y los estribos deben tener unas dimensiones adecuadas para resistirlo.

El arco siempre está empujando, el arco nunca duerme dice un antiguo proverbio árabe. La arquitectura de fábrica tiene, pues, dos problemas principales: proyectar arcos que se mantengan en pie y estribos que resistan su empuje. De hecho el problema más crítico es el segundo ya que un fallo de los estribos conlleva el colapso catastrófico de la estructura (la mayoría de las reglas de proyecto tradicionales se refieren al proyecto de los estribos).

El lugar geométrico de los centros de empuje forma una línea, la línea de empujes. La forma de la línea depende, por lo tanto, de la geometría del arco, de sus cargas y, también, de la familia de juntas planas consideradas (Moseley fue el primero en formular rigurosamente el concepto, 1835; podemos encontrar un excelente estudio desde el punto de vista matemático en Milankovitch, 1907).

Dado que la fábrica debe trabajar a compresión, es obvio que la línea de empujes debe estar contenida dentro del grosor del arco. Podemos imaginar cada dovela actuando contra las otras dos sólo a través de los centros de empuje. Si ahora damos la vuelta al arco, lo que eran fuerzas de

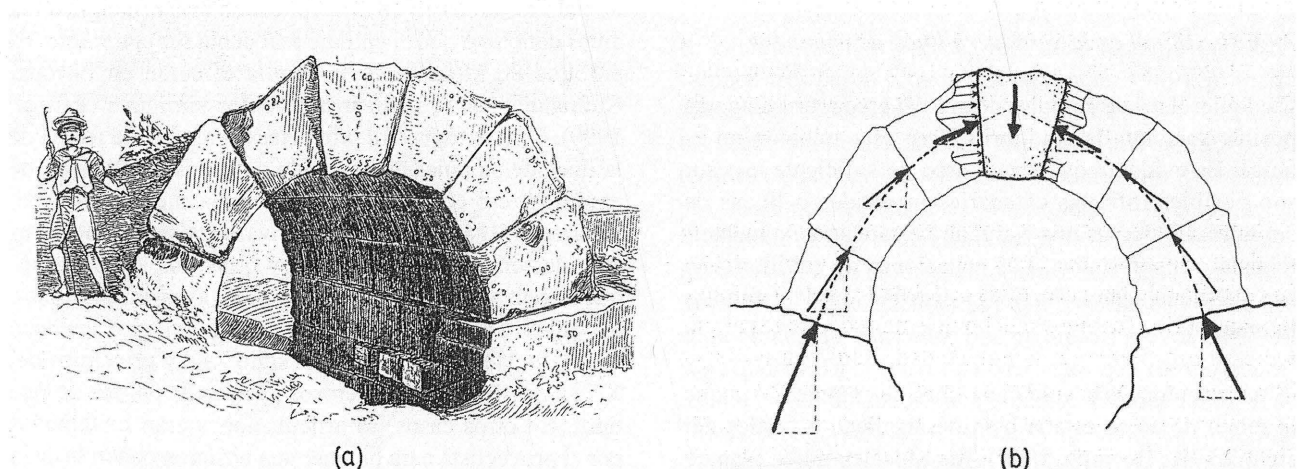


Figura 2.- Arco de dovelas etrusco. Estudio del equilibrio de las dovelas (Durm 1885).

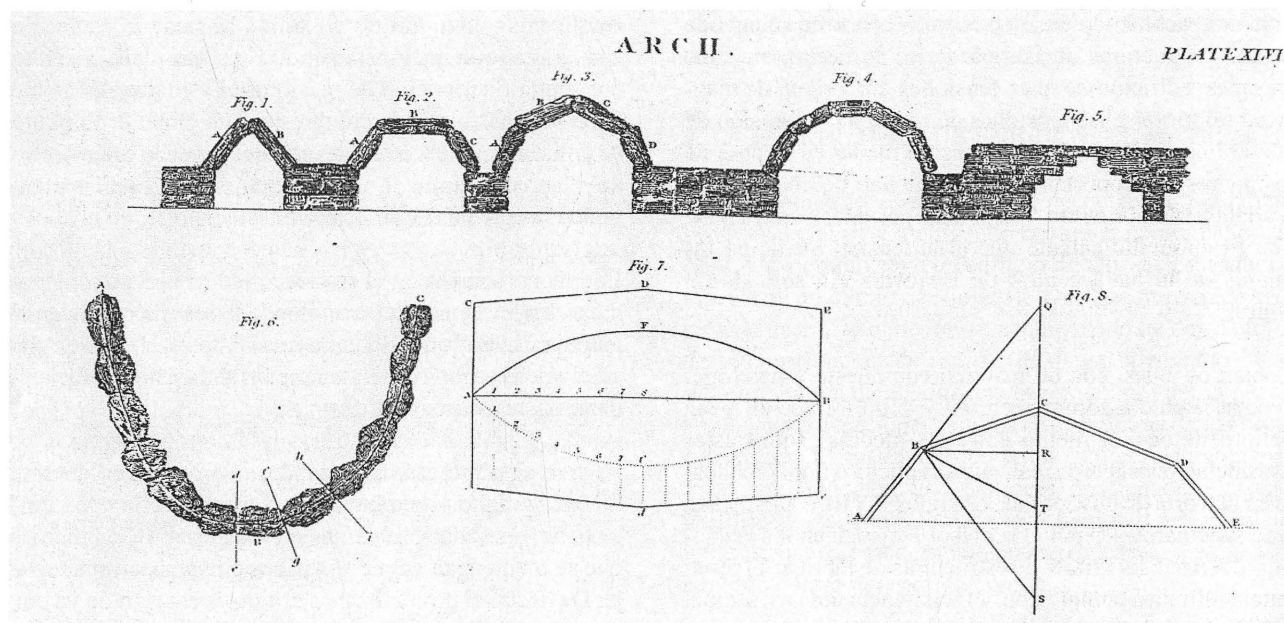


Figura 3.- Estabilidad de arcos de fábrica. Arco colgante de fábrica (Robison 1822).

compresión se transforman en fuerzas de tracción: las dovelas cuelgan al igual que una cadena, como se aprecia en la Figura 3 de Robison (1851).

Ésta fue la brillante idea de Hooke ca. 1670, cuando trataba de resolver el problema de la forma y empuje de los arcos: del mismo modo que cuelga un cable flexible, así pero invertido se sostendrá el arco rígido. Si todas las dovelas del arco tienen el mismo tamaño la línea de empujes se aproxima mucho a una catenaria invertida. Unos veinte años más tarde Gregory (1697) completó la afirmación de Hooke añadiendo: la auténtica y verdadera forma de un arco o bóveda no es otra que la catenaria. Y si arcos de otras formas se mantienen en pie, es porque existe una catenaria en su interior (Heyman, 1999). De este modo en la Figura 4 el arco está en equilibrio con una distribución de esfuerzos representada por la catenaria invertida.

Análisis: ¿Cuál es la verdadera línea de empujes?

Cualquier línea de empujes dentro del arco representa una posible solución de equilibrio. Pero esta solución no es única. Es evidente que en un arco de suficiente espesor son posibles infinitas catenarias invertidas o líneas de empujes. El arco es una estructura estáticamente indeterminada o hiperestática. Las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para obtener la distribución de esfuerzos internos.

¿Cuál es entonces la verdadera línea de empujes? Aunque la teoría de arcos estaba bien desarrollada a finales del siglo XVIII (Heyman, 1972), fue Moseley quien planteó por primera vez esta pregunta, y trató de determinar la posición de la línea de empujes. Para ello necesitó realizar otras afirmaciones, además de las de equilibrio. En los

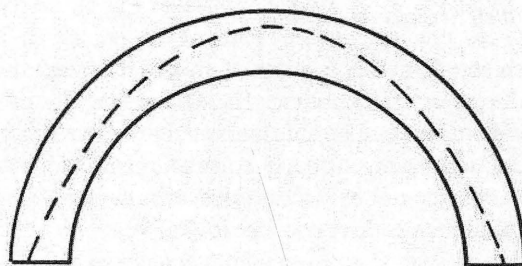


Figura 4.- Posible línea de empujes de un arco de medio punto (Heyman 1995).

inicios del análisis elástico enunció un nuevo Teorema de la Estática con el objetivo de obtener las reacciones de las estructuras hiperestáticas rígidas: el Principio de la Mínima Reacción (formulación general en 1833; particularizado para los arcos en 1843). Aplicando este principio a los arcos concluyó que el empuje real debía ser el mínimo. El enfoque de Moseley tuvo amplia difusión en Europa. Culmann y otros realizaron intentos similares (Kurrer, 1990). Otro enfoque era proyectar el arco con la forma de la línea de empujes, suponiendo entonces que la línea de empujes real coincidiría con la línea media del arco, Villarceau (1853). Como alternativa, se podían colocar tres articulaciones, una en la clave y otras dos en los arranques; esto convertía el arco en un arco triarticulado isostático y la posición de la línea de empujes quedaba fijada (en la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX se construyeron numerosos puentes de fábrica de este tipo). En otros casos las articulaciones eran imaginadas por el proyectista para obtener una posición concreta de la línea de empuje. Pero, todos estos enfoques fueron considerados incompletos, soluciones escapistas de una teoría imperfecta.

El cálculo elástico

Poncelet (1852) era consciente del problema y en su revisión histórica de la teoría de arcos de fábrica propuso la aplicación de la teoría elástica a los arcos de fábrica con la finalidad de obtener una solución única (Bresse, en 1848 ya había desarrollado con todo detalle la teoría para el caso de arcos circulares de madera o hierro). De cualquier forma, los ingenieros se resistían a asimilar la fábrica (como hemos visto un material esencialmente heterogéneo, anisótropo, irregular. . .) a un material elástico (uniforme, isótropo, etc.). De hecho hasta aproximadamente 1880, los ingenieros clasificaban los arcos en dos grupos: elásticos, ejecutados en madera o hierro forjado, y rígidos, los ejecutados en fábrica. Ya en la década de 1860 se realizaron algunos cálculos elásticos de arcos de fábrica (como por ejemplo los llevados a cabo por el ingeniero y arquitecto español Saavedra, 1860). Castigliano (1879) también aplicó su teoría de los sistemas elásticos a los puentes de fábrica.

Pero sería Winkler (1879) el primero en tratar en profundidad el enfoque elástico del cálculo de arcos de fábrica. Tras revisar todas las teorías de su tiempo, concluyó que el cálculo elástico era la mejor opción. Sin embargo añadió un extenso comentario sobre las *störungen* (perturbaciones) que pueden afectar la posición de la línea de empujes. Éstas se debían principalmente a la deformación de la cimbra durante la construcción, el cedimiento de los estribos por la acción del empuje, el fraguado incompleto del mortero de las juntas, y el efecto de las variaciones de temperatura. Todas estas perturbaciones se traducían en agrietamientos y deformaciones del arco y Winkler era consciente de que afectarían notablemente a la posición de la línea de empujes. Winkler propuso, entonces, calcular el arco para lo que denominó su estado normal, sobre una cimbra rígida y estribos rígidos, con el mortero perfectamente fraguado, sin variaciones de temperatura. Consideró, después, que la línea de empujes calculada para este estado normal era la verdadera o real. No obstante, para paliar el efecto de las perturbaciones sobre este estado real sugirió algunos modos de controlar la posición de la línea de empujes, disponiendo en el arco articulaciones internas durante su construcción, Figura 5.

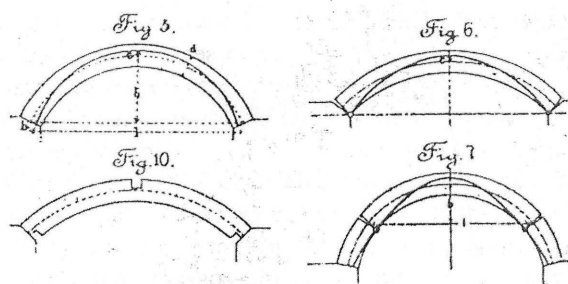


Figura 5.- Desplazamiento de la línea de empujes debida a cierto cedimiento de los apoyos. Sistemas para fijar la línea de empujes durante la construcción (Winkler 1880).

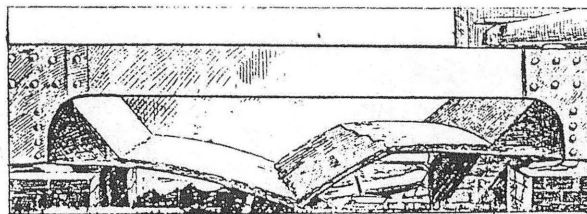


Figura 6.- Ensayo de colapso de una bóveda de hormigón armado Monier (Öst. Ing.- und Arch.- Verein 1895).

Después de 1880 los ingenieros aceptaron la teoría elástica, y los esfuerzos se dirigieron a simplificar el pesado proceso de cálculo que implicaba (Hertwig, 1941). Sin embargo, todavía había dudas y para verificar la validez del cálculo elástico de arcos de fábrica el *Österreichisches Ingenieur- und Architekten- Verein* (Institución Austriaca de Ingenieros y Arquitectos) realizó una serie de ensayos sobre arcos de piedra, ladrillo, hormigón en masa y hormigón armado, algunos de ellos de hasta 23 m de luz. Los resultados se interpretaron como la confirmación experimental y definitiva de la moderna teoría elástica (véase por ejemplo, Howe, 1906). No obstante, en las fotografías y dibujos que acompañaban el exhaustivo informe sobre los ensayos (de más de 130 páginas) se podían apreciar claramente agrietamientos debidos a movimientos y la aparición de mecanismos de colapso, Figura 6, por la formación de lo que se llamarían más tarde rótulas plásticas.

Pero para los ingenieros de finales del siglo XIX, que buscaban el estado real, único, de esfuerzos internos en la estructura, el cálculo elástico era la mejor opción. Y esto, a pesar de que los arcos de fábrica se agrietaban de modo visible durante la construcción y el descimbrado, y a pesar de que el material era irregular, anisótropo y discontinuo. Se denominó entonces al cálculo elástico de arcos la moderna teoría de arcos en oposición a la antigua teoría.

Efecto de un pequeño cedimiento de los apoyos. Imposibilidad de determinación de la línea de empujes real

El cálculo elástico parece, sin duda, ser muy racional. Implica tres pasos principales (Heyman, 1999): primero se escriben las ecuaciones de equilibrio; luego se escriben las ecuaciones elásticas, que relacionan los esfuerzos internos con las deformaciones de la estructura (por ejemplo, el momento flector es proporcional a la curvatura); finalmente se hacen algunas consideraciones sobre la compatibilidad de las deformaciones (afirmaciones acerca del modo en el que los elementos están conectados y sobre las condiciones de contorno: por ejemplo, que los estribos son rígidos). El sistema de ecuaciones que resulta puede resolverse obteniéndose una solución elástica única. Entonces se calculan las tensiones y se comparan con los valores admisibles, obtenidos dividiendo los valores de la tensión de rotura a compresión simple del material, que se obtienen mediante ensayos de laboratorio. Habitualmente no se es consciente de que el sistema de ecuaciones que

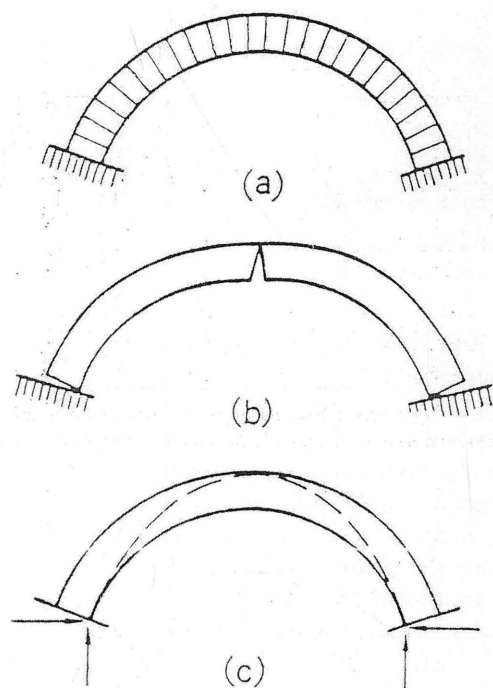


Figura 7.- Agrietamiento de un arco de fábrica tras el descimbrado (Heyman, 1995).

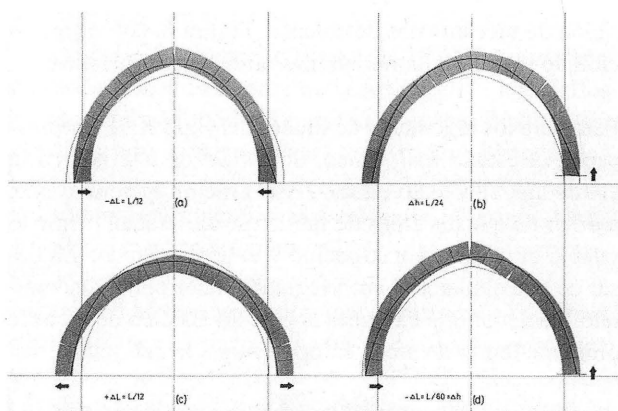


Figura 8.- Distintos patrones de agrietamiento debidos a movimientos de los apoyos producidos en un modelo de cartulina. (Huerta 2004).

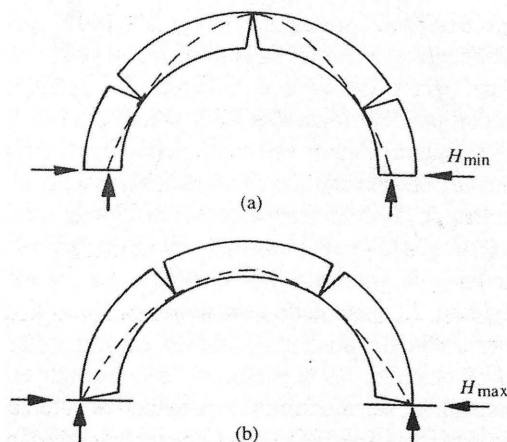


Figura 9.- Arco de medio punto sometido a su propio peso: a) empuje mínimo; b) empuje máximo (Heyman, 1995).

resulta es muy sensible a pequeñas variaciones en las condiciones de equilibrio. El profesor Heyman ha tratado este asunto en profundidad en muchas de sus publicaciones, que se enumeran en las referencias, y cuyos argumentos principales resumiremos a continuación.

Consideremos un arco de fábrica sobre una cimbra, Figura 7. Tras el descimbrado el arco comienza a empujar contra los estribos. Los estribos reales no son rígidos y cederán una cierta cantidad. La luz, entonces, aumenta y el arco debe acomodarse a este incremento de la luz. De que modo puede un arco (formado por el material rígido-unilateral que describimos con anterioridad) hacer esto? El arco se agrieta. Se produce una grieta en el intradós de la clave y otras dos en el trasdós en los apoyos.

El arco se convierte en triarticulado y sólo puede trazarse una línea de empujes. Pero es posible que el movimiento no sea simétrico: quizá el apoyo derecho además de ceder horizontalmente lo haga verticalmente. Todo posible movimiento es correspondido con un agrietamiento concreto, y las grietas se abren y cierran lo que permite al arco responder a esta agresión del entorno. Esto se puede observar mediante el uso de modelos; incluso con modelos planos sencillos de cartulina se obtienen muy buenos resultados, como puede verse en la Figura 8.

Las grietas, por tanto, no son peligrosas. La capacidad de la estructura de adaptarse a las agresiones del entorno reside precisamente en su posibilidad de agrietamiento, y ésta se debe a las afirmaciones hechas acerca del material: resistencia infinita a compresión, resistencia nula a tracción e imposibilidad de que se produzca deslizamiento.

Las grietas determinan la posición de la línea de empujes. Cuando las grietas varían la línea se mueve bruscamente de una posición a otra y la distribución de esfuerzos internos varía completamente, Figura 8. En el modelo los movimientos son muy grandes, pero incluso movimientos muy pequeños, inapreciables a simple vista, producen el mismo efecto. Como es obvio, es imposible conocer o predecir esta clase de movimientos, que pueden deberse a la consolidación del terreno bajo las cimentaciones, a variaciones de la humedad del terreno, quizá el paso ocasional de una gran carga, etc. Este tipo de perturbaciones es, en esencia, incognoscible. No hay un estado real de la estructura hay, sino, como dice Heyman, un aquí y ahora efímero, cambiante; por tanto, es imposible conocer cuál es la verdadera línea de empujes, es decir, en que estado se encuentra el arco. Lo que sí sabemos, sin embargo, es que cualquiera que sea la línea de empujes, deberá estar contenida en el grosor del arco.

Aunque no sea posible determinar el empuje real del arco, sí es posible establecer su valor dentro de unos límites. Existen dos posiciones extremas de la línea de empujes, que corresponden al empuje mínimo y al empuje máximo, como es evidente en la Figura 9.

Resulta interesante señalar que las deformaciones no son de ningún modo elásticas; son el resultado de la división de la estructura en una serie de partes que, conectadas a través de las articulaciones, permiten ciertos movimientos. En la Figura 10, la bóveda de cañón inicial sufrió una gran deformación al producirse un incremento de 250 mm en la luz inicial de 6,5 m. Los movimientos fueron detenidos mediante la adición de grandes contrafuertes, para evitar el hundimiento por dislocación hacia abajo de la parte superior de la bóveda. Las grietas no son peligrosas, pero grandes deformaciones en curso de los apoyos pueden, por supuesto, conducir al colapso completo de la estructura.

El colapso de arcos

Para comprender de modo completo el comportamiento de los arcos de fábrica debemos estudiar su forma de colapso. Surge la pregunta de cómo es posible que una estructura construida con un material infinitamente resistente pueda colapsar. Hemos visto como una deformación excesiva puede conducir al colapso. Pero, ¿se podrá producir el colapso sin que se produzca ningún movimiento de los apoyos?

Como hemos visto cuando la línea de empujes toca el borde del arco se produce una articulación, que permite la rotación. Tres articulaciones hacen al arco estáticamente determinado y un arco con tres articulaciones es una estructura estable. Una articulación más, no obstante, convertiría al arco en un mecanismo de cuatro bielas que colapsaría. Por lo tanto un aumento de la carga que llevara a la formación de cuatro articulaciones provocaría el colapso sin que se produjera la rotura del material. Esto puede ocurrir en un arco estable si añadimos una carga que deforme lo suficiente la línea de empujes. De nuevo la analogía de la cadena colgante nos ayuda a entender el proceso, Figura 11.

Análisis límite de los arcos de fábrica. Teoremas fundamentales

Si podemos dibujar una línea de empujes dentro del grosor de un arco, sabemos que ese arco tiene al menos una posibilidad de mantenerse en pie. Pero, ¿significa esto que el arco se mantendrá en pie? No será también posible encontrar un modo posible de colapso? ¿Cabe la posibilidad de que un pequeño movimiento imprevisto, pueda causar un agrietamiento que lleve al colapso?

Ésta es la cuestión fundamental de la teoría de estructuras. Los ingenieros y arquitectos del siglo XIX trabajaban suponiendo que era suficiente proyectar una estructura con un cierto grado de seguridad, respecto a un cierto estado de equilibrio. Por ejemplo, Rankine (1858) afirmaba que un arco sería seguro si era posible dibujar una línea de empuje dentro de su tercio central. Pero no daba ninguna

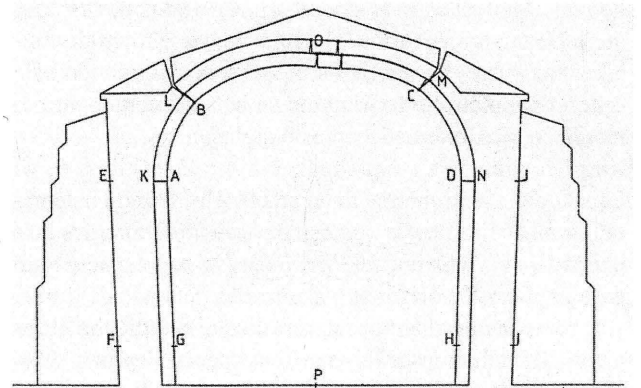


Figura 10.- Bóveda de cañón con grandes deformaciones. El estado deformado no puede explicarse elásticamente (Huerta y López 1997).

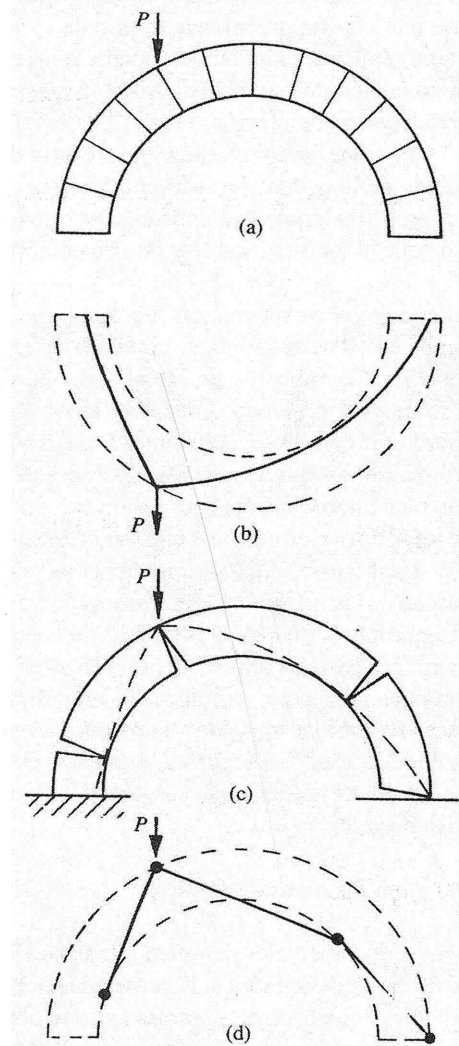


Figura 11.- Colapso de un arco de medio punto bajo una carga puntual. (Heyman, 1995).

prueba de ello. De este modo, el proyecto del arco alcanzaría su máxima seguridad si la línea media del arco se hacía coincidir con la línea de empujes (desde luego, los arcos catenarios también se agrietan después de descimbrar

debido a pequeños movimientos inesperados de los apoyos). De cualquier forma, el hecho es que el método funcionaba: puentes y edificios proyectados siguiendo este criterio geométrico de Rankine se han mantenido firmemente en pie durante decenios o siglos.

La solución al problema llegó en el siglo XX con la teoría del Análisis Límite y la demostración de los Teoremas fundamentales (Gvozdev, 1936, 1960). No hay espacio aquí para explicar los orígenes y desarrollo del análisis límite, y se recomienda al lector interesado que estudie los libros y artículos del profesor Heyman (en especial Heyman 1998, 1999). En particular el Teorema de la Seguridad establece que si es posible encontrar un sistema interno de esfuerzo internos en equilibrio con las cargas que no incumpla ciertas afirmaciones sobre el material (la condición de cedencia o límite), la estructura no se hundirá, es segura. En el caso del arco de fábrica, cualquier línea de empuje compatible con las cargas aplicadas satisfará las condiciones de equilibrio. La condición de cedencia consiste en que el material debe trabajar a compresión, esto es, los empujes deben estar contenidos dentro de cada junta. Por lo tanto, el que podamos dibujar una línea de empujes (equilibrio) dentro del arco (material en compresión) es una prueba absoluta de que el arco es estable y que no colapsará.

No se hace ninguna consideración sobre las condiciones de contorno. El arco se agrietará, como en la Figura 8, respondiendo a movimientos de los apoyos, la línea de empujes se moverá de modo apreciable hasta encontrar nuevos estados de equilibrio, pero nunca se saldrá del arco y no se formarán las suficientes articulaciones para convertir el arco en un mecanismo (por supuesto, si la estructura sufre una gran deformación, como en la figura 10, los cálculos deben hacerse teniendo en cuenta la geometría real deformada). Por lo tanto el Teorema de la Seguridad del Análisis Límite soluciona el problema de encontrar la línea de empujes real. Es imposible conocer cual es la línea de empujes real, pero esto no debe importarnos, ya que basta poder dibujar una línea de empujes dentro del arco para demostrar que es seguro. La potencia del teorema es que esta línea no tiene que ser la real, es suficiente con que sea posible.

La seguridad de los arcos de fábrica

Los teoremas fundamentales permiten también calcular la seguridad de los arcos de fábrica. El profesor Heyman propone un factor geométrico de seguridad que se obtiene al comparar la geometría real con la de un arco límite cuyo espesor sería el mínimo para soportar las cargas. Refiriéndonos a la Figura 12 de Heyman, es evidente que debido al Teorema de la Seguridad el arco (a) será seguro; se puede trazar una línea de empujes dentro de la fábrica con holgura. Ahora, si se disminuye progresivamente el espesor del arco, finalmente sólo será posible dibujar solamente una línea de empujes en su interior. La línea toca (debido

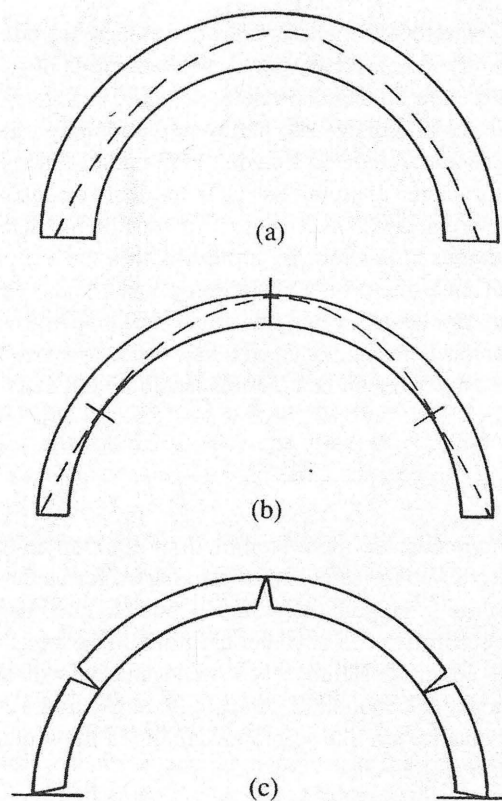


Figura 12.- Arco de medio punto: a) estable; b) de espesor límite (Heyman, 1995)

a la simetría) en cinco puntos del borde de la fábrica; de este modo tenemos cinco articulaciones y el arco se encuentra en un estado de equilibrio inestable y se hundirá. Podemos evaluar la seguridad del arco original comparando su espesor con el espesor del arco límite. Si el arco real tiene el doble de espesor el factor geométrico de seguridad será de 2, si triple de 3 y así sucesivamente. En el caso de un puente, se debe calcular el arco límite para la posición más desfavorable de la sobrecarga móvil que debe poder atravesarlo (Heyman, 1982).

Calcular el valor exacto del factor geométrico de seguridad puede suponer la realización de pesados cálculos. Pero se puede obtener un límite inferior con facilidad. Por ejemplo, para mostrar que un arco determinado sometido a unas cargas concretas tiene un factor de seguridad igual o mayor de 2, será suficiente dibujar una línea de empujes dentro de la mitad central del arco. En la segunda mitad del siglo XIX los arcos se proyectaban de tal forma que fuera posible dibujar una línea de empujes dentro del tercio central. Como hemos visto, la justificación elástica de evitar cualquier esfuerzo de tracción en las juntas no tiene sentido, pero el procedimiento era completamente seguro.

4. LAS BÓVEDAS DE FÁBRICA: EL ENFOQUE DEL EQUILIBRIO

Una de las consecuencias más importantes del Teorema de la Seguridad es que permite el enfoque del equilibrio

del cálculo y análisis estructural. Heyman fue el primero en darse cuenta de las fundamentales consecuencias de este teorema (Heyman, 1967). La labor del analista no es buscar el estado de equilibrio real, sino encontrar estados razonables de equilibrio para la estructura que se estudia. De hecho, éste ha sido el enfoque seguido por todos los grandes arquitectos e ingenieros. Estaba implícito en el proyecto geométrico de los maestros de la antigüedad, y en las obras de Maillart, Torroja, Nervi, Candela o Gaudí, por citar sólo algunos de los grandes arquitectos e ingenieros.

El enfoque del equilibrio permite analizar bóvedas complejas empleando la teoría de los arcos que ya se ha expuesto. El método consiste en imaginar la bóveda dividida en una serie de arcos y buscar una línea de empujes dentro de cada uno de ellos. Si es posible encontrar una solución de equilibrio a compresión, según el Teorema de la Seguridad, la estructura es segura.

Cúpulas

Una cúpula se puede imaginar dividida en una serie de arcos, o gajos, obtenidos al cortar la bóveda por planos meridianos. Cada dos gajos enfrentados forman un arco; si podemos dibujar una línea de empuje dentro de este arco, habremos encontrado un posible estado de equilibrio a compresión y la cúpula es segura, no colapsará. Este método de los cortes fue empleado por primera vez de modo implícito por Bouguer (1734), y Frézier (1737) lo aplicó explícitamente al análisis cualitativo de múltiples tipos de bóvedas (incluidas las cúpulas). El primer cálculo de una cúpula real imaginándola dividida en gajos, fue realizado en el contexto de los informes sobre la cúpula de San Pedro en Roma por los tres matemáticos que aplicaron, por primera vez en el análisis de estructuras, el principio del trabajo virtual (Jacquier, Le Seur, Boscovitch, 1743) y, también, por Poleni (1743, 1748) que fue el primero en emplear modelos colgantes para la determinación de líneas de empujes en cúpulas. Después de esto, la división en arcos por el corte con planos meridianos se convirtió en el enfoque habitual para el análisis de cúpulas. El profesor Heyman (1967, 1977) ha retomado esta técnica y ha sido el primero en explicar los supuestos teóricos y aplicaciones dentro del marco de la teoría de Análisis Límite.

El estudio del colapso de las cúpulas es mucho más complicado. Kobell (1855) realizó los primeros estudios sobre el espesor límite de las cúpulas, y Beckett (1877) propuso mecanismos de colapso; en ambos casos los resultados no son enteramente correctos, pero sí muy aproximados. El primer estudio riguroso fue el de Heyman (1967, 1977); véase también Oppenheim et al. (1989). El tema no tiene, en general, interés en el campo del análisis de estructuras históricas, pues el estudio de estados de equilibrio suministra información suficiente para estimar la seguridad.

Respecto a las grietas, el caso típico que encontramos en la mayoría de las ocasiones es el de las grietas meridianas. Éstas están ocasionadas por un pequeño cedimiento del sistema de contrarresto (el tambor en la mayoría de los casos). Una vez más ha sido el profesor Heyman el primero en realizar un estudio riguroso y sistemático del problema (Heyman, 1988). La cúpula empuja y la fábrica del sistema de contrarresto cede ligeramente hacia afuera, de forma radial. Las grietas meridianas se producen de modo inevitable como se ve en la Figura 13. Un cedimiento asimétrico puede producir agrietamientos similares a los que se representan en la Figura 14. Es posible calcular la altura de las grietas y, por supuesto, relacionar los movimientos de las partes; Heyman (1988) lo ha hecho con la cúpula del Panteón de Roma. De este modo, el análisis de cúpulas, es, gracias a la simetría, una cuestión bastante sencilla. Si la cúpula descansa sobre un tambor con cierta

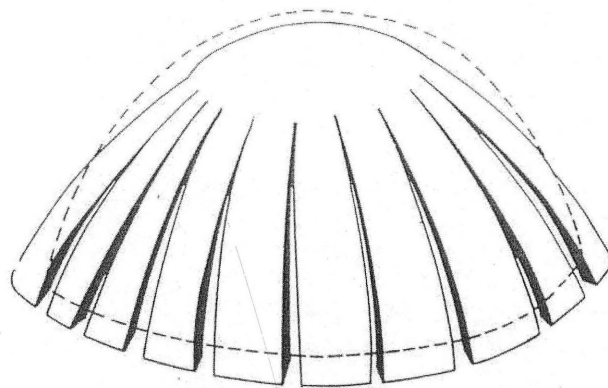


Figura 13.- Agrietamiento típico de una cúpula (Heyman, 1988).

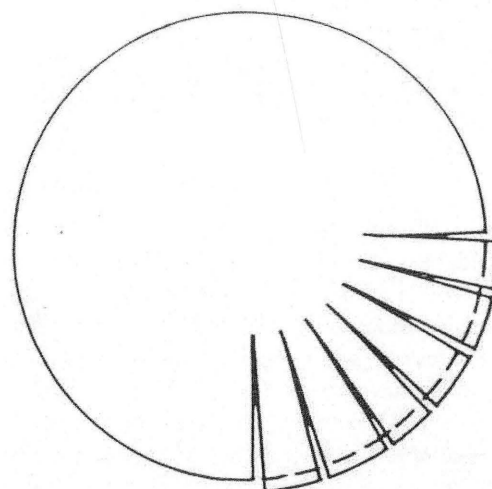


Figura 14.- Agrietamiento parcial de una cúpula (Heyman, 1988).

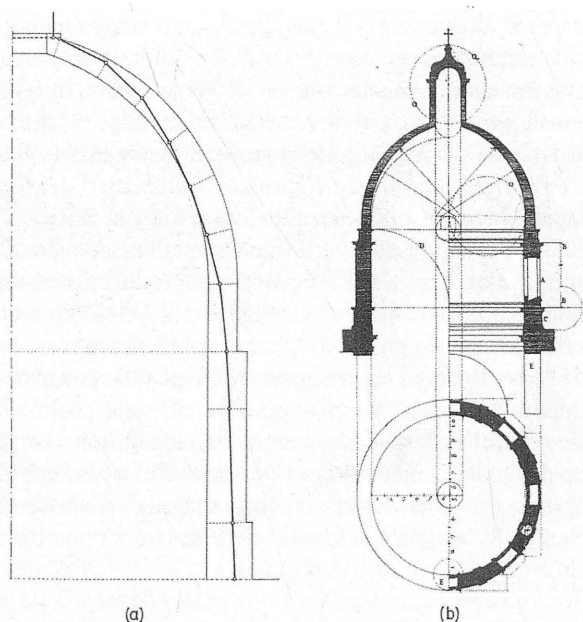


Figura 15.- Estabilidad de una cúpula de fábrica construida según las reglas geométricas de Fontana.

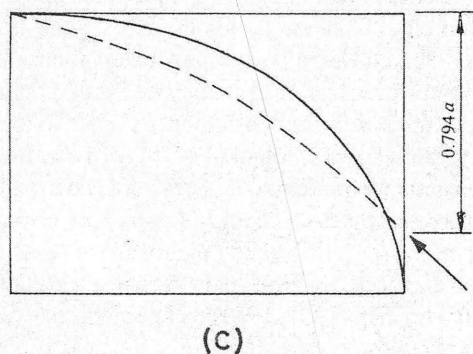
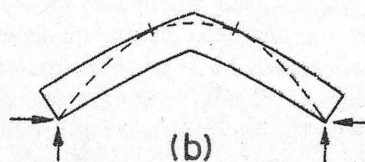
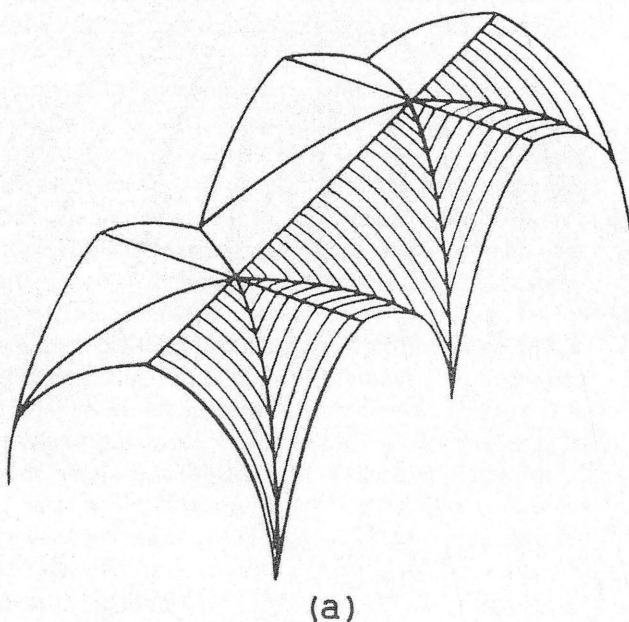


Figura 16.- Análisis límite de un bóveda gótica por el método de los cortes (Heyman, 1995).

altura, se debe comprobar su estabilidad. En la Figura 15 se comprueba la estabilidad de una cúpula construida según las reglas de Fontana (1694) (se supone la cúpula de una sola cáscara y que cúpula y tambor son del mismo material).

Bóvedas góticas

Del mismo modo que en las cúpulas, se puede aplicar el método de los cortes a las bóvedas góticas. En este caso,

la familia de planos de corte más conveniente depende de la forma de la bóveda. Consideremos, en primer lugar, una típica bóveda de crucería que resulta de la intersección de dos bóvedas cilíndricas apuntadas. Ahora podemos imaginar que cada una de las bóvedas cilíndricas está compuesta de una serie de arcos elementales que se apoyan sobre los nervios. Es posible calcular el empuje de cada arco y luego analizar los nervios sometidos a un sistema de cargas formado por las reacciones de cada arco elemental. Frézier (1737) fue el primero en proponer este enfoque y se ha aplicado en numerosas ocasiones desde entonces (por ejemplo, por Dietlein, 1823, en el contexto de la teoría de arcos, incorrecta, de La Hire). Heyman (1966, 1977) lo sistematizó dentro del marco del Análisis Límite, Figura 16.

Al parecer, fue Wittmann (1879) quien realizó los primeros cálculos gráficos de bóvedas de crucería. La estática gráfica permitía a los ingenieros realizar complicados cálculos de equilibrio, sin necesidad de integrar trabajosamente las ecuaciones de equilibrio. También se pueden

emplear modelos colgantes, tanto para comprender de un modo físico los principios, o como una herramienta de proyecto o análisis. La Figura 17 muestra los aspectos fundamentales del equilibrio de una bóveda gótica: la plementería apoya sobre los arcos cruceros que transmiten la carga hasta las esquinas, donde se disponen los arbotantes o estribos.

Gaudí fue el gran maestro en el uso de modelos para el proyecto de estructuras de fábrica. La cripta de la iglesia

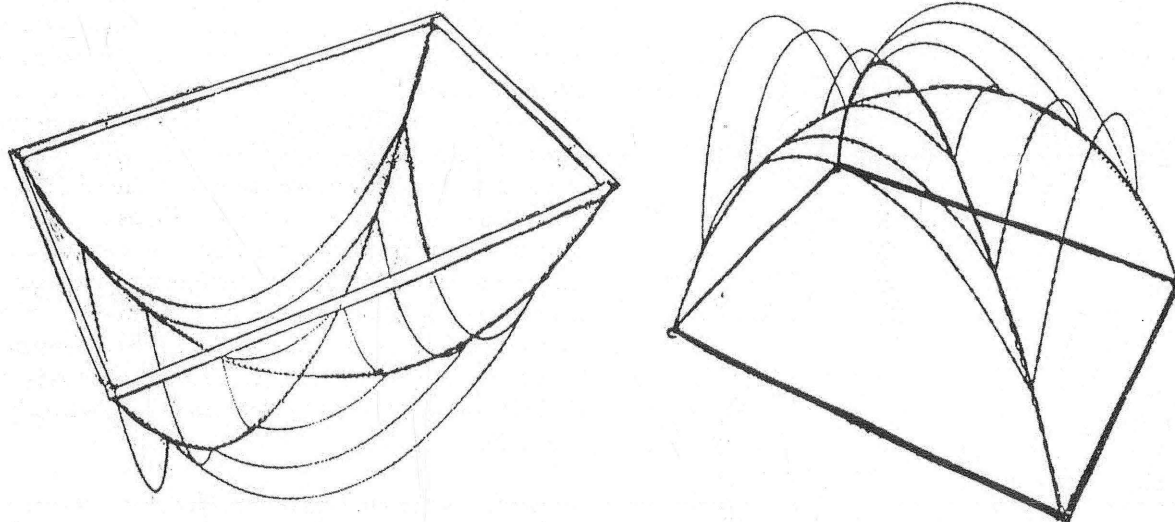


Figura 17.- Modelo catenario de una bóveda de crucería típica (Beranek, 1988).

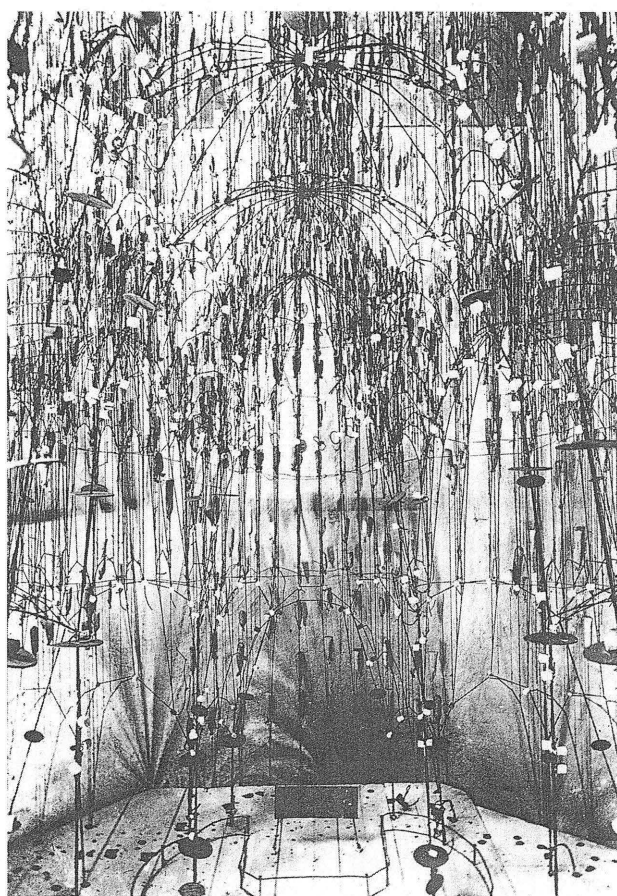


Figura 18.- Diseño funicular de Gaudí para la iglesia de la colonia Güell (Rubió, 1913).

de la colonia Güell es quizá el mejor ejemplo, Figura 18. Gaudí, también empleaba métodos gráficos para el proyecto de estructuras de fábrica equilibradas, Figura 19.

Como ya se ha dicho, la elección de una familia de planos de corte adecuada (y éste es un primer paso fundamental

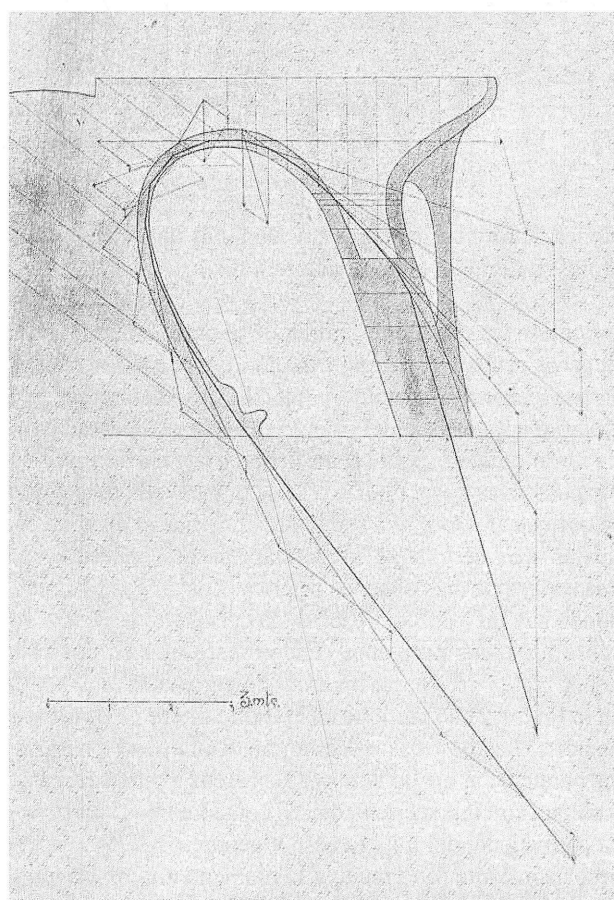


Figura 19.- Diseño de Gaudí basado en la estática gráfica para los pilares del Park Güell (Rubió, 1913).

del análisis que requiere experiencia y habilidad por parte del calculista) depende de la forma de la bóveda. En la Figura 20 se representan varias posibilidades propuestas por Mohrmann en sus adiciones a la tercera edición del *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen* (manual de la construcción gótica) de Ungewitter de 1890. Las aporta-

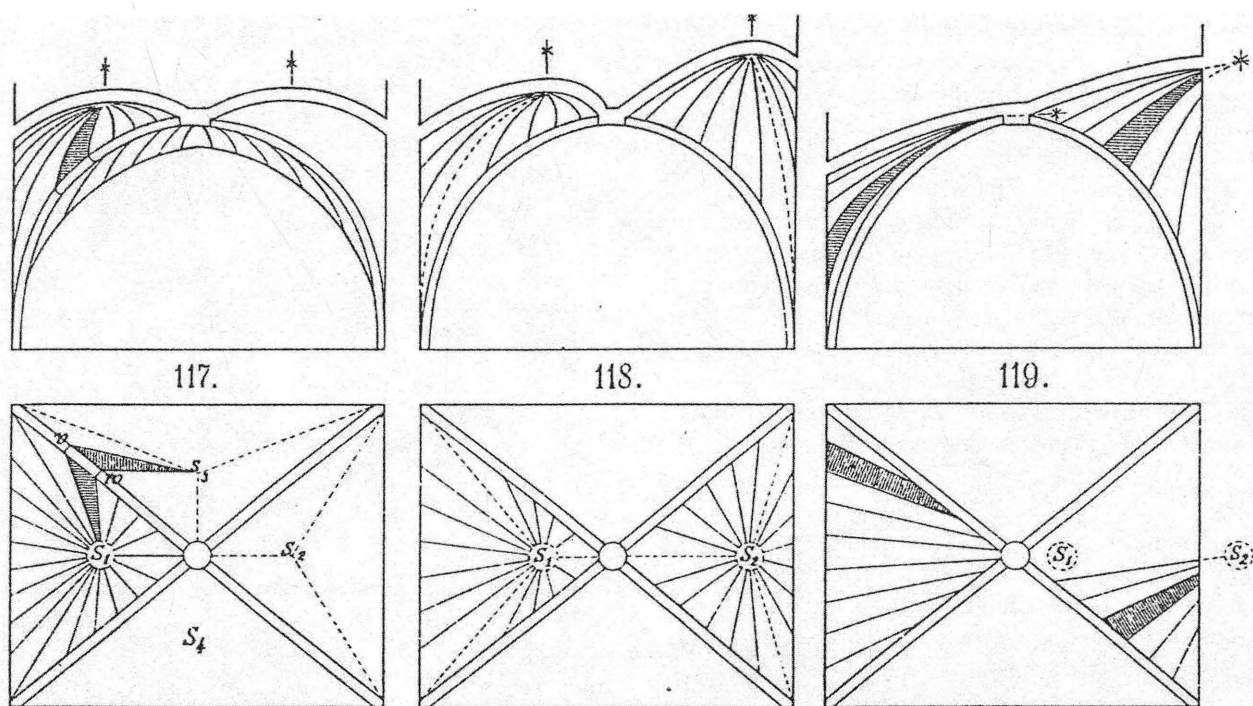


Figura 20.- Diferentes familias de cortes para el análisis de bóvedas góticas. (Ungewitter 1890)

ciones de Mohrmann constituyen el más importante estudio estructural de la arquitectura gótica.

En ocasiones una cierta familia de planos de corte puede llevar a estimar el empuje de una bóveda de un modo sorprendentemente rápido y sencillo. Consideremos por ejemplo el problema del cálculo del empuje de una bóveda tardo-gótica española. La geometría general en estas bóvedas se asemeja mucho a la de una bóveda baída, que se obtiene al cortar una semiesfera por cuatro planos verticales. Los nervios se encuentran, de este modo, sobre una superficie más o menos esférica. Los únicos pliegues, donde hay un cambio brusco de la curvatura, se producen sobre los arcos perpiaños (que en este tipo de bóvedas tienen mayor grosor que los arcos cruceros). De este modo, en la Figura 21 se propone una familia diferente de planos de corte. Las bóvedas se cortan mediante planos verticales paralelos al eje de la nave. Los arcos elementales que resultan, son todos circulares. Si consideramos una bóveda equivalente del mismo peso y geometría, y con un espesor constante (que incluya la plementería, las claves y los nervios), podemos deducir la distribución de cargas verticales sobre los arcos perpiaños, con sólo desarrollar en vertical cada uno de los semiarcos (las componentes horizontales a cada lado del arco se anulan entre sí). La distribución de la carga es casi uniforme con un pico pronunciado muy cerca de los arranques. Es evidente que podemos trabajar con una distribución uniforme ignorando estos picos, que además se producen sobre la zona de los enjarjes de la bóveda que pertenece constructivamente al muro. Por otra parte, el peso de la bóveda será un orden

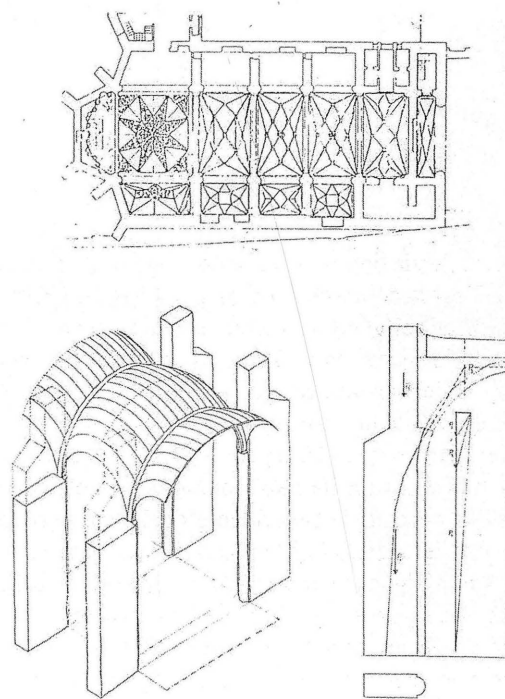


Figura 21.- Análisis del equilibrio de las bóvedas tardogóticas del convento de Santo Domingo en Medina de Rioseco, Valladolid.

de magnitud mayor que el peso del arco perpiaño, por lo que podemos comprobar la estabilidad de un arco no-pesante bajo la acción de una carga uniforme (obtenida dividiendo el peso total de la bóveda entre la luz del arco perpiaño). Por supuesto, la línea de empujes es parabólica

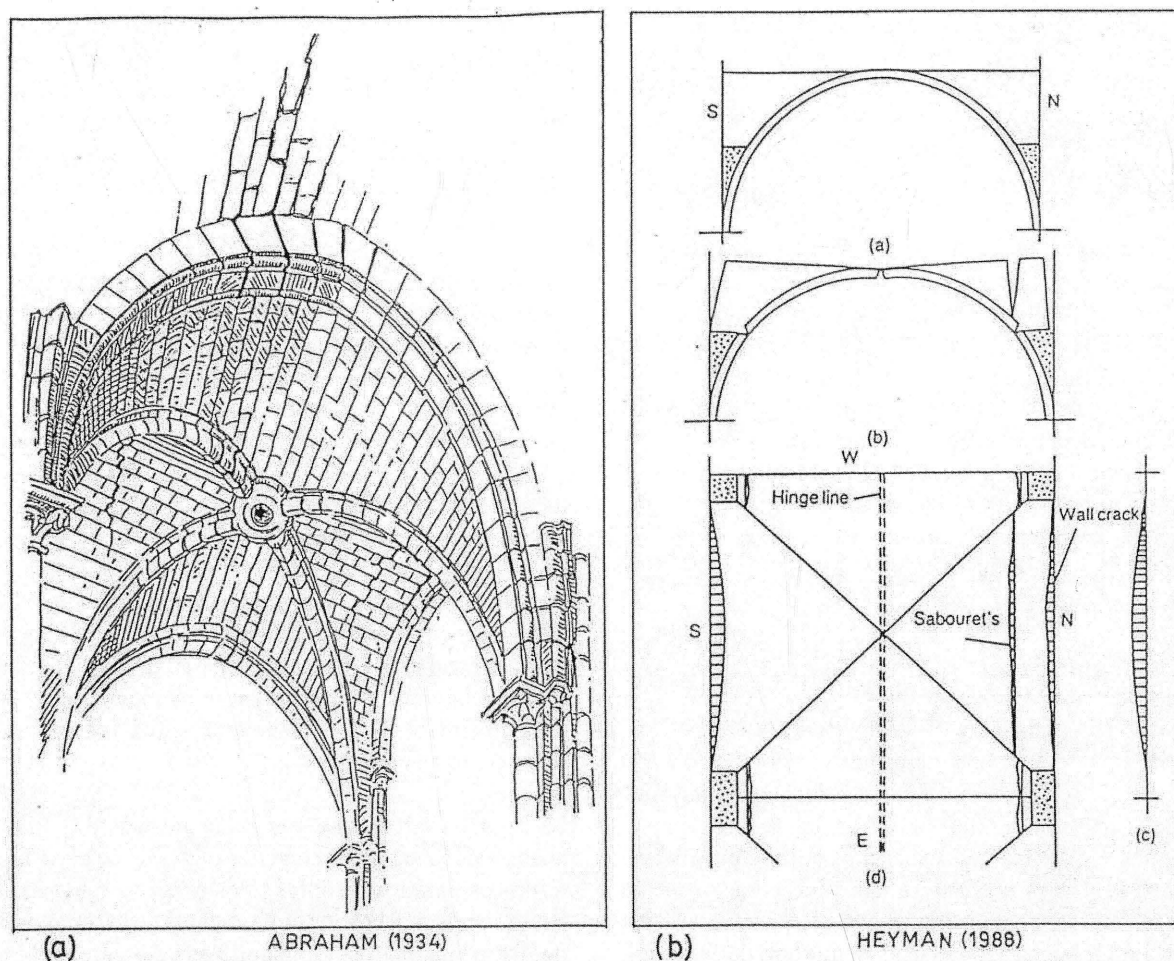


Figura 22.- Grietas en una bóveda gótica cutripartita. (Abraham, 1934).

y el empuje puede obtenerse inmediatamente. Ahora ya se puede realizar la comprobación final de la estabilidad del estribo. En el polígono de fuerzas de esta misma figura puede apreciarse que la relación entre el material de la bóveda y el del sistema de estribo: la bóveda representa menos del 10% de la estructura de fábrica (generalmente suele encontrarse entre el 5% y 10%, dependiendo del tipo de estructura). Los estribos son importantes, no sólo porque de ellos depende la seguridad global, sino porque la mayor parte del material (y también el dinero) se emplea en ellos. Los antiguos maestros estaban en lo cierto al considerar el cálculo de los estribos como la parte más importante del proyecto estructural (Huerta, 2004). Es obvio, entonces, que el empuje de la bóveda depende principalmente de los siguientes factores: las dimensiones globales del tramo, su espesor, y su peralte, esto es, la relación entre su flecha y la luz. Este enfoque global para obtener de modo directo el empuje de las bóvedas góticas fue planteado por primera vez por Michon (1857). De hecho, con estos los datos se pueden elaborar tablas de empujes para bóvedas de distintos tipos y formas. Mohrmann elaboró tablas detalladas de este tipo (Ungewitter, 1890), que Heyman ha incluido resumidas en uno de sus libros (Heyman, 1995).

En lo referente al agrietamiento de las bóvedas góticas, se pueden hacer las mismas observaciones que en el caso de las cúpulas. Las grietas dividen la estructura en una serie de bloques que permiten los movimientos impuestos por el entorno. Parece ser que el primer estudio sobre el agrietamiento de las bóvedas góticas se debe al ingeniero francés Sabouret (1928, 1934). El primer estudio sistemático lo hizo Heyman (1983) (véase también Barthel, 1993). La figura 22 representa las grietas típicas en un dibujo de Pol Abraham junto con la interpretación de Heyman.

Estribos góticos

Se debe notar que en el ejemplo anterior sobre el cálculo del empuje de bóvedas del gótico tardío español, no se ha tenido en cuenta la aportación de los muros entre los estribos: dado que existe algún tipo de conexión entre muro y estribo, parte del peso del muro contribuirá a aumentar la estabilidad. No obstante, el estado de equilibrio obtenido es satisfactorio, con la línea de empujes pasando con holgura dentro del tercio central de la base del estribo. Para el caso de los estribos de bóvedas los factores geométricos de seguridad son más restrictivos; Rankine (1858) sugería que el empuje debía pasar, al menos, dentro del tercio cen-

tral. Estudios realizados sobre estructuras reales dejan ver que los coeficientes geométricos en estructuras existentes son todavía más restrictivos, estando el empuje contenido dentro del cuarto central.

El hecho de no tener en cuenta la aportación de los muros está, por supuesto, del lado de la seguridad. Pero si tras realizar el análisis, el estado de equilibrio no es satisfactorio, deberemos plantear otras hipótesis que expliquen el hecho de que el edificio permanezca y haya permanecido en pie durante siglos. Por otro lado, el considerar que los estribos y los muros forman un todo monolítico que soporta el empuje puede resultar demasiado optimista. Si el analista considera que la situación del sistema de contrarresto es crítica, debería estudiar el problema cuidadosamente, teniendo en cuenta la constitución interna de la fábrica (en especial la trabazón entre los muros y los estribos, o entre los contrafuertes y los muros).

El estudio de las grietas y de la inclinación tanto interna como externa del sistema muro-estribo puede ser de ayuda en este contexto. En el caso de la Figura 10 (Huerta y López 1997) la inclinación de la superficie exterior de los muros es mayor que la de la superficie interior. La conclusión es clara; debe existir una grieta vertical que divide el muro en dos hojas. La imagen que resulta es, por supuesto, alarmante. Además, la inspección de la constitución interna de la fábrica reveló resultados inesperados: en lo alto de los muros, donde actúa el empuje de las bóvedas, la fábrica es de buena calidad, con un mortero de cal excelente, pero en la base muros las piedras del relleno estaban recibidas con tierra. El muro, por lo tanto, no sólo es anisótropo en dirección transversal sino también en dirección vertical (los usuarios de programas, por ejemplo de MEF, que asimilan la fábrica a un continuo deberían tomar nota de estos aspectos). En casos como éste, cualquier análisis debe considerar de modo cuidadoso el comportamiento del sistema de contrarresto.

5. EDIFICIOS DE FÁBRICA

El estudio de los edificios históricos tiene dos objetivos principales: 1) entender cómo se comporta la estructura; 2) comprender el origen y significado de las grietas, si éstas son visibles. Sólo con una buena comprensión de ambos aspectos puede el arquitecto o ingeniero emitir un informe y decidir qué medidas tomar (si es necesario tomar alguna). La primera tarea implica el estudio de los posibles estados de equilibrio. La segunda implica imaginar qué clase de movimientos han dado lugar al agrietamiento observado.

La mejor forma de realizar el estudio del equilibrio consiste en empezar por identificar los elementos que componen la estructura; de hecho, el decidir qué es estructura y qué no lo es, constituye precisamente el primer paso del

análisis. En las catedrales góticas las estructura y sus elementos son muy evidentes, mientras que en las iglesias románicas o bizantinas no está tan claro. Debe insistirse en que este análisis previo tiene una importancia primordial: una inadecuada identificación de la estructura y los elementos que la forman podría conducir a un análisis incorrecto.

Tradicionalmente se realiza una división entre *bóvedas*, que empujan, y *estribos*, que soportan el empuje (o contrarrestan). A su vez, como se ha visto, bóvedas y estribos pueden imaginarse formados por distintos elementos. Afortunadamente, el número de tipos básicos de estructuras históricas de fábrica es limitado y desde la antigüedad existe una clasificación que se pone de manifiesto en los distintos términos empleados: cúpulas, bóvedas de crucería, bóvedas de arista, bóvedas en rincón de claustro, bóvedas de abanico, arbotantes, etc. Una vez que se ha realizado la división en elementos, se realiza el estudio de los estados de equilibrio de cada uno de ellos, que deben respetar la condición esencial del material: los esfuerzos internos deben ser de compresión. Finalmente, se establece un equilibrio global en el que todos los elementos interactúan a compresión.

La segunda tarea tiene generalmente más dificultad. El analista debe tener en mente los patrones de agrietamiento típicos para los distintos tipos de arcos y bóvedas, así como su relación con los movimientos de los apoyos. Luego, debe imaginar, por analogía, qué clase de movimientos podrían haber ocasionado los agrietamientos reales que se observan en el edificio. Agrietamientos complejos, producidos por movimientos combinados, requerirán la experiencia y perspicacia del analista.

Sólo a finales de siglo XIX se empezaron a realizar análisis de edificios grandes y complejos. El desarrollo de la estática gráfica permitió, entonces, una buena comprensión de las condiciones de equilibrio y facilitó el análisis. Como se ha dicho, el estudio más claro y sistemático se encuentra en Ungewitter/Mohrmann (1890). Otras aportaciones al tema estaban referidas al análisis de determinadas catedrales góticas. Por ejemplo, Benouville (1891) estudió la catedral de Beauvais, la cual ha sido también estudiada por Heyman (1967). Una aportación muy importante fue el estudio de Rubió i Bellver (1912) sobre la estructura de la catedral de Palma de Mallorca (Figura 25). Esta catedral es una de las más grandes de la arquitectura gótica. La nave central tiene una luz de unos 20 m y una altura de 42 m. El principal problema del proyecto son los pilares de la nave principal, muy esbeltos y que reciben en lo alto el empuje de las naves laterales (de 9 m de luz). ¿Cómo es posible que el esbelto pilar equilibre en su cabeza el empuje de la nave lateral? La solución está en cargar la nave central con un peso tal que sea posible conseguir (con la ayuda de los arbotantes) una fuerza vertical que introduzca el empuje dentro del pilar, Figura 23. Pero

do de sillería sobre el que apoya parte de la cubierta. La estrategia consiste en aumentar la carga de los arcos transversales de las naves laterales, para que su empuje sea mayor y pueda finalmente equilibrar, de modo casi exacto, el empuje de la nave central. De hecho, en el dibujo de Zorn la carga discurre a través del pilar casi verticalmente.

Como ocurría en Palma de Mallorca el maestro gótico está controlando el equilibrio jugando con las cargas como en una balanza. Este delicado equilibrio no siempre fue entendido por los arquitectos del neo-gótico y, con frecuencia, las iglesias neogóticas se encuentran en peor estado que las góticas. Bollig (1975) atribuía esto a que los arquitectos neogóticos imitaban el interior de las estructuras góticas ignorando la necesidad de las cargas sobrepuestas, invisibles desde el suelo.

6. CONCLUSIONES

El enfoque del equilibrio para el análisis y proyecto de estructuras de fábrica ha demostrado ser el más adecuado. Está implícito en las reglas geométricas de los maestros antiguos y fue empleado por los grandes ingenieros de los siglos XVIII y XIX. Se deduce directamente de la aplicación del Teorema de la Seguridad a las estructuras de fábrica. Este teorema constituye, en palabras del profesor Heyman (2001), la roca sobre la que se cimenta hoy día toda la teoría del cálculo de estructuras.

El hecho de considerar sólo soluciones de equilibrio que respeten la característica esencial del material, que sólo resiste compresiones, lleva al analista a plantearse sólo las cuestiones realmente relevantes. No se hacen, por ejemplo, consideraciones acerca de las condiciones de contorno, que son variables e imposibles de determinar. Tampoco se consideran las propiedades elásticas de la fábrica. Sólo se considera lo más esencial de la estructura bajo estudio, sus posibles estados de equilibrio. La tarea no es sencilla y ningún programa informático nos dará una solución única que se pueda considerar como real, pero el problema se presenta con toda su fascinante complejidad y riqueza. Ahora el analista se encuentra en situación de plantearse preguntas relevantes y dar respuestas pertinentes.

BIBLIOGRAFÍA

- Baker, J. and J. Heyman. 1969. *Plastic Design of Frames. 1. Fundamentals*. Cambridge: Cambridge University Press. 228 pp..
- Barthel, R. 1993. *Tragverhalten gemauerter Kreuzgewölbe*. Karlsruhe: Institut für Tragkonstruktionen.
- Beckett Denison, E. 1871. On the Mathematical Theory of Domes. *Memoirs of the Royal Institute of British Architects*, pp. 81-115.
- Benouville, L. 1891-2. Étude sur la Cathédrale de Beauvais, *Encyclopédie d'architecture*, 4ª serie, vol. 4, pp. 52-54, 60-62, 68-70.
- Beranek, W.J. 1988. Understanding of Structures. *Stable-Unstable? Structural Consolidation of Ancient Buildings*, editado por R.M. Lemaire y K. Van Balen, Leuven: Leuven University Press, pp. 29-44.
- Bollig, H. 1975. *Statische Schäden an Hallenkirchen im Rheinland* Dissertation: Fakultät für Bauwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen.
- Bouguer, P. 1734. Sur les Lignes Courbes propres a former les Voûtes en Dome. *Mémoires de l'Académie Royale de Sciences de Paris*, pp. 149-166.
- Bresse. 1848. Etudes théoriques sur la résistance des arcs employés dans les ponts en fonte ou en bois. *Annales des Ponts et Chaussées*, Vol. 25, pp. 150-193.
- Castigliano, C. A. P. 1879. *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Torino.
- Culmann, K. 1866. *Die graphische Statik* Zürich: Meyer und Zeller.
- Dietlein, J. F. W. 1823. *Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe*. Halle: Hemmerbe und Schwetschte.
- Dupuit. 1870. *Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie*. Paris: Dunod.
- Durm, J. 1885. *Die Baukunst der Etrusker und Römer. (Hand. der Arch. 2. Teil. 2.Band)*. Darmstadt: Diehl.
- Fontana, C. 1694. *Il Tempio Vaticano e sua origine*. Roma: Nella Stamparaia di Gio: Francesco Buagni.
- Frézier, A.F. 1737-39. *La théorie et la pratique de la coupe de pierres*. . . Paris: C.-A. Jombert. 3 vols..
- García, S. 1681. *Compendio de architectura y simetría de los templos*. Ms. 8884, Biblioteca Nacional de Madrid . (facs. ed. Churubusco: 1979. Valladolid: 1991)
- Gvozdev, A. A. 1960. The determination of the value of collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 1, pp. 322-35.
- Hertwig, A. 1941. Die Entwicklung der Statik der Baukonstruktionen im 19. Jahrhundert. *Technikgeschichte*, Vol. 30, pp. 82-98.
- Heyman, J. 1966. The Stone Skeleton. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 2, pp.249-79.
- Heyman, J. 1967. On shell solutions of masonry domes *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 3, pp.227-41.
- Heyman, J. 1967-68. Beauvais Cathedral. *Trans. of the Newcomen Society*, Vol. 40, pp. 15-35.
- Heyman, J. 1972. *Coulomb's Memoir on Statics: An Essay in the History of Civil Engineering*. London: Cambridge University Press. (reprinted by the Imperial College Press, 1997).
- Heyman, J. 1977. *Equilibrium of shell structures*. Oxford, Oxford University Press.
- Heyman, J. 1982. *The Masonry Arch*. Chichester: Ellis Horwood.
- Heyman, J. 1983. Chronic Defects in Masonry Vaults: Sabouret's Cracks. *Monumentum*, Vol. 26, pp. 131-141.
- Heyman, J. 1988. Poleni's problem. *Proc. of the Institution of Civil Engineers*, Part 1, Vol. 84, pp. 737-759.
- Heyman, J. 1995. *The Stone Skeleton. Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge: Cambridge University Press. (spanish trans. *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera/CEHOPU, 1999.)
- Heyman, J. 1995. *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica. Colección de ensayos*. ed. by S. Huerta. Madrid.

- Heyman, J. 1996. *Arches, vaults and buttresses. Collected essays*. Aldershot: Variorum, Ashgate Publishing.
- Heyman, J. 1998. *Structural analysis: a historical approach*. Cambridge, Cambridge University Press.
- Heyman, J. 1999. *The science of structural engineering*. London: Imperial College Press (spanish transl. *La ciencia de las estructuras*. Madrid: Instituto Juan de Herrera/CEHOPU, 2001).
- Howe, M. A. 1906. *A Treatise on Arches*. New York: John Wiley and Sons.
- Huerta, S. 1990. *Diseño estructural de arcos, bóvedas y cúpulas en España, ca. 1500- ca. 1800*. Ph. D. Universidad Politécnica de Madrid. E. T. Superior de Arquitectura.
- Huerta, S. 1996. La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico *Obra Pública*, N° 38, pp. 18-29.
- Huerta, S. and G. López 1997. Stability and consolidation of an ashlar barrel vault with great deformations: the church of Guimarei *Structural Studies, Repairs and Maintenance of Historical Buildings*, ed. por S. Sánchez-Beitia y C. A. Brebbia. Southampton: Computational Mechanics Publications, pp. 587-96.
- Huerta, S. 1998. Mecánica de las bóvedas de la catedral de Gerona *Las grandes bóvedas hispanas, Curso celebrado en Madrid 19-23 mayo de 1997*, S. Tarragó (ed.). Madrid: CEDEX.
- Huerta Fernández, S. 2002. The medieval scientia of structures: the rules of Rodrigo Gil de Hontañón. *Towards a History of Construction*. A. Becchi, F. Foce, M. Corradi y O. Pedemonte (eds). Basel: Birkhäuser Verlag, pp. 567-585.
- Huerta, S. 2004. *Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- Kobell. 1855. Beitrag zur Statik der Gewölbe. *Allgemeine Bauzeitung*, pp. 92-110.
- Kurrer, K.-E. 1990. Auf der Suche der wahren Stützlinie in Gewölben *Humanismus und Technik*, pp. 20-54.
- Michon. 1857. *Instruction sur la stabilité des voûtes et des murs de revêtement*. Metz: École de Metz.
- Milankowitch, M. 1907. "Theorie der Druckkurven. *Zeitsch. für Mathematik und Physik*, Vol. 55, pp. 1-27.
- Moseley, H. 1833. On a new principle in statics, called the principle of least pressure. *Philosophical Magazine*, Vol. 3, pp. 285-288.
- Moseley, H. 1843. On the Theory of the Arch. *The Theory, Practice and Architecture of Bridges...*, editado por John Weale. London: Architectural Library, Vol. I, parte III, pp. 1-72, láms. 101-3.
- Oppenheim, I. J.; Gunaratnam, D. J. and Allen, R. H. 1989. Limit State Analysis of Masonry Domes. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 115, pp. 868-882.
- Österreichisches Ingenieur- und architekten-Verein 1895. Bericht des Gewölbe-Ausschusses. *Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und architekten-Vereines*, N° 20-34, pp. 1-131 pp., Figs., 27 Taf.
- Poleni, G. 1743. *Riflessioni . . . sopra i danni, e sopra la ristaurazione della cupola del tempio di San Pietro di Roma*. Mss. 5519 B. Marciana, Venezia.
- Poleni, G. 1748. *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Padova.
- Poncelet, J.V. 1852. Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 35, n° 17, pp. 494-502, 531-540, 577-587.
- Rankine, W. J. M. 1858. *A Manual of Applied Mechanics*. London: Charles Griffin.
- Robison, J. 1822. On the construction of arches. *A System of Mechanical Philosophy*, with notes of D. Brewster. Edinburgh: John Murray, Vol. 1, pp. 616-60, lám. 10.
- Rubió Bellver, J. 1912. Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca. *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, pp. 87-140.
- Rubió Bellver, J. 1913. Dificultats per arribar a la síntesis arquitectònica. *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, pp. 63-79.
- Saavedra, E. 1860. Nota sobre la determinación del problema del equilibrio de las bóvedas *Revista de Obras Públicas*, Vol. 8, pp. 101-104.
- Sabouret, V. 1928. Les voûtes d'arêtes nervurées. Rôle simplement décoratif des nervures. *Le Génie Civil*, Vol. 92, pp. 205-209.
- Sabouret, V. 1934. L'évolution de la voûte romane du milieu du XIe siècle au début du XIIe. *Le Génie Civil*, Vol. 104, pp. 240-243.
- Sanabria, S. L. 1984. *The evolution and late transformations of the gothic mensuration system* Ph. D., Princeton University.
- Tosca, Tomás Vicente. 1707-15. *Compendio matemático en que se contienen todas las materias más principales de las ciencias que tratan de la cantidad...* Valencia: Antonio Bordazar. 9 vols.
- Ungewitter, G. 1890. *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. III Auflage neu bearbeitet von K. Mohrmann*. 2 vols. Leipzig: T.O. Weigel Nachfolger.
- Villard de Mézieres, A. Yvon 1853. *Sur l'établissement des arches de pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité*. Paris: Imprimerie Impériale.
- Viollet-le-Duc, E. 1858. *Construction Dictionnaire raisonné de l'Architecture Française du XI au XVI siècle*, Paris: A. Morel, Vol. 4, pp. 2-208. (Spanish translation and edition by E. Rabasa y S. Huerta. *La construcción medieval*. Madrid: Instituto Juan de Herrera / CEHOPU, 1999.)
- Winkler, E. 1879 y 1880. Die Lage der Stützlinie im Gewölbe. *Deutsche Bauzeitung*, Vols. 13 y 14, pp. 117-119, 127-128, 130 (1879); 58-60 (1880).
- Wittmann, W. 1879. Zur Theorie der Gewölbe. *Zeitschrift für Bauwesen*, Vol. 29, cols. 61-74, figs., 4 láms.
- Zorn, E. 1933. *Statische Untersuchung der St Martinskirche in Landshut*. Dissertation: Technischen Hochschule Universität München.

Nota

Este artículo es una versión revisada de la conferencia invitada al 3rd. *International Seminar on Historical Constructions, Guimarães 7-9, November, 2001*, cuyas actas fueron editadas por P. B. Lourenço and P. Roca, (Guimarães: Universidade do Minho, 2001).